CONTENIDOS:

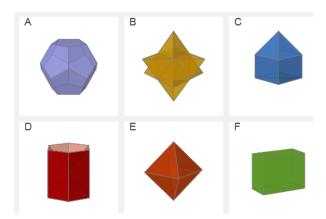
- Prismas y pirámides: descripción, elementos y clasificación.
- Cilindro, cono y esfera: descripción y elementos.
- Realización de clasificaciones de cuerpos geométricos atendiendo a diferentes características.
- Desarrollos planos de prismas, pirámides, conos y cilindros. Uso de instrumentos de dibujo para la realización de los desarrollos planos.
- Sistema métrico decimal: unidades de volumen.
- Concepto y cálculo de áreas y volúmenes de prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas. Expresión del resultado en la unidad y con la precisión adecuada a la situación.

Contenidos mínimos:

- Reconocer los poliedros que ves en la naturaleza y en las construcciones humanas.
- Diferenciar y describir los cuerpos redondos de revolución, cilindro, cono y esfera, y sus elementos.
- Buscar regularidades y relaciones entre figuras planas y espaciales, desarrollando cuerpos geométricos.
- Calcular la superficie de los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos.
- Comprender el concepto de medida del volumen y manejar las unidades de medida del sistema métrico decimal.
- Calcular el volumen de los cuerpos geométricos básicos: prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.

1. POLIEDROS

Los poliedros son cuerpos geométricos limitados por polígonos.



Hay dos tipos importantes: cóncavos y convexos. Un poliedro es convexo si al colocarlo sobre una superficie plana se puede apoyar sobre cualquiera de sus caras, mientras que un poliedro cóncavo tiene varias caras que no la tocan.

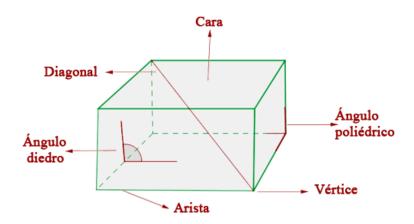
Ejercicio: Selecciona los poliedros convexos de la imagen superior.

ELEMENTOS DE UN POLIEDRO

- A los polígonos que limitan un poliedro se les llama caras. De hecho, la misma palabra poliedro significa muchas caras en griego.
- Además de las caras, podemos distinguir las aristas, segmentos en que se cortan dos caras. Y los vértices, puntos en que se cortan las aristas.
- También están los ángulos diedros, formados por dos caras, y los ángulos poliedros, formados por tres o más caras.

Observa los elementos de un poliedro en la siguiente animación:

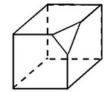
aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad05/pagina_7.html



LA RELACIÓN DE EULER

Para cualquier poliedro convexo la suma del número de caras más el de vértices menos el número de aristas es siempre dos.





Ejercicio: Comprueba que se cumple en el siguiente poliedro.

1.1. Prismas

Los prismas son poliedros que tienen dos caras iguales y paralelas, llamadas bases, y el resto de sus caras laterales son paralelogramos.

Según el tipo de polígono que sean las bases, los prismas se llaman triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.

También pueden ser cóncavos o convexos según sean los polígonos de las bases; y rectos si las caras laterales son perpendiculares a las bases u oblicuos si no lo son.

Puedes probar a crear diferentes prismas en el siguiente enlace:

<u>aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad05/pagina_1.html</u>





PRISMAS REGULARES

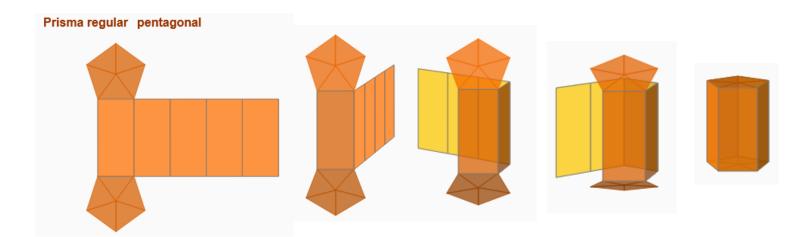
Un prisma es regular si es recto y las bases son polígonos regulares.

Las caras laterales de un prisma regular son rectángulos todos iguales.

Todos los prismas son desarrollables, es decir, sus caras se pueden desplegar en un plano y volver a plegar para construir el prisma.

El desarrollo de un prisma recto está compuesto por sus dos bases y un rectángulo dividido en tantas partes como número de caras laterales. Puedes comprobarlo en el siguiente enlace:

aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad05/pagina_8.html



PARALELEPÍPEDOS

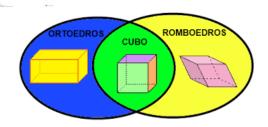
Son un tipo especial de prismas en los que todas sus caras son paralelogramos. Se trata de prismas cuadrangulares que pueden ser rectos u oblicuos. Ej. una caza de zapatos, un libro...



Ejercicio: monta el prisma en clase que te ha dado tu profesora.

- Cuando todas las caras son rectángulos es un ortoedro.
- Un caso particular del ortoedro es el cubo, todas las caras son cuadrados.
- Si todas las caras son rombos, y se llama romboedro.

Ejercicio: Encuentra paralelepípedos en tu casa y sácales una fotografía.



1.2. Pirámides

Una pirámide es un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera, y por caras laterales triángulos con un vértice común.

El vértice común se llama vértice de la pirámide. La altura de la pirámide es la distancia entre el vértice y la base.

Una pirámide puede ser triangular, cuadrangular, pentagonal... dependiendo del tipo de polígono que sea la base. También puede ser cóncava o convexa y recta u oblicua.



Puedes practicar construyendo pirámides en este enlace:

aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad05/pagina_2.html

PIRÁMIDES REGULARES

Una pirámide es regular si es recta y su base es un polígono regular.

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles todos iguales.

La altura de cada uno de estos triángulos se llama apotema de la pirámide, no hay que confundirla con la apotema del polígono de la base.

Como los prismas, las pirámides también son desarrollarse.

Ejercicio: monta la pirámide en clase que te ha dado tu profesora. Dibuja antes sobre ella la apotema de la base y la apotema de la pirámide.

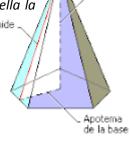












Altura

1.3. Poliedros regulares

Son los que cumplen que sus caras son polígonos regulares idénticos, y en cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.

Con estas condiciones sólo se pueden construir cinco poliedros regulares convexos (que se conocen como sólidos platónicos):

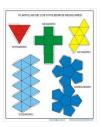
- Con triángulos equiláteros: **tetraedro, octaedro e icosaedro**.
- Con cuadrados: exaedro más conocido como cubo.
- Con pentágonos regulares: dodecaedro.



Puedes ver su desarrollo en este enlace:

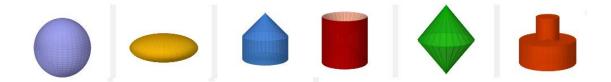
aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad05/pagina 3.html

Ejercicio: monta los sólidos platónicos a partir de una plantilla que te dará tu profesora en clase. Antes, numera las caras, los vértices y las aristas.



2. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

La superficie lateral de los siguientes cuerpos es curva. Son cuerpos redondos.



El cilindro, el cono y la esfera son cuerpos de revolución ya que se original al girar una superficie plana alrededor de un eje, dando una vuelta completa.



2.1. Cilindros

Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

El eje de rotación es la recta sobre la que se sitúa el lado sobre el que gira y el lado paralelo a él es la generatriz.

Distinguimos la superficie lateral y dos bases que son dos círculos iguales. El radio de estos círculos es el del cilindro.

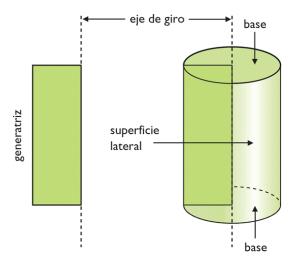
La altura del cilindro es la distancia entre las dos bases, que en el caso de un cilindro recto coincide con la generatriz.

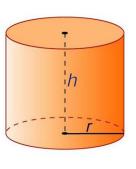
La superficie de un cilindro es desarrollable en el plano, y se compone de un rectángulo (superficie lateral) y dos círculos (uno por cada base, de radio el del cilindro).

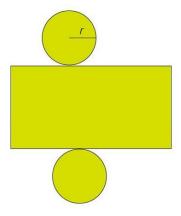
Puedes ver estos desarrollos en:

aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad05/pagina 14.html

Ejercicio: Encuentra en casa un objeto con forma cilíndrica, localiza su generatriz, y mide su radio.





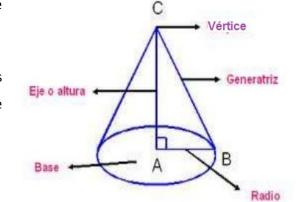


2.2. Conos

Un cono recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

El eje de rotación es la recta sobre la que se sitúa el lado sobre el que gira y la hipotenusa es la generatriz.

En un cono distinguimos la superficie lateral y una base que es un círculo. El punto en que se corta la generatriz y el eje de rotación es el vértice.



La altura del cono es la distancia entre el vértice y la base.

La superficie del cono es desarrollable en el plano y se compone de un sector circular (la superficie lateral) y un círculo (que es la base).

Puedes ver estos desarrollos en:

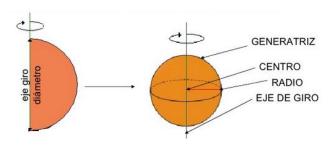
aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad05/pagina 15.html



2.3. Esferas

Al girar un círculo (o un semicírculo) sobre uno de sus diámetros se genera una esfera.

La recta sobre la que se sitúa el diámetro es el eje de revolución y la circunferencia (o semicircunferencia) la



generatriz. El centro y el radio de la esfera son los mismos que los del círculo que la genera.

El radio coincide con la distancia del centro a cualquier punto de la superficie de la esfera. Esta propiedad caracteriza a la esfera que es el conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo, el centro.

La esfera no es desarrollable.

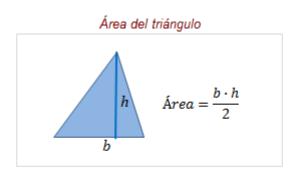
Observa cómo se genera la esfera en:

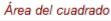
aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad05/pagina 13.html

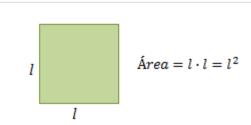
3. ÁREAS DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

Es la suma de las áreas de los polígonos que lo forman. Por lo tanto para calcular sus áreas, usaremos sus desarrollos.

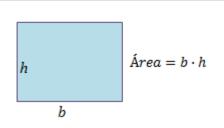
Recordemos las áreas de polígonos y del círculo:





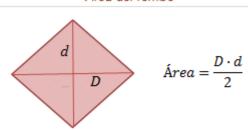




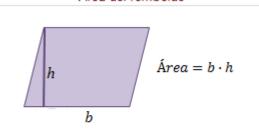


Area del rectángulo

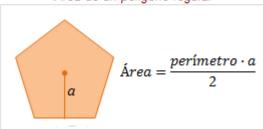
Área del rombo



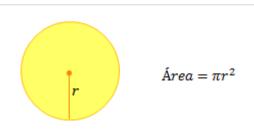
Área del romboide



Área de un polígono regular







3.1. Áreas de los poliedros

ÁREA DE LOS PRISMAS



Área lateral = Perímetro de la base altura Área total = Área lateral + 2 Área de la base

Área total de un prisma exagonal regular de altura 15 cm y arista de la base 6 cm.

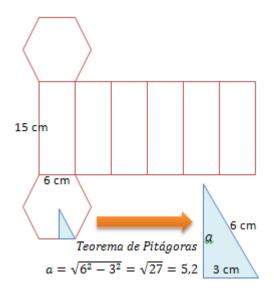
Perimetro de la base = 6.6 = 36 cm

Área lateral = $6.6.15 = 540 \text{ cm}^2$

La base es un exágono regular, para calcular la apotema se aplica el Teorema de Pitágoras.

Área base = perímetro apotema/2 = = 6·6·5,2/2 =93,6 cm²

Área total = 540 + 2.93,6 = 727,2 cm²



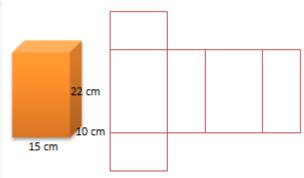
Área total de un paralelepípedo de dimensiones: largo 15 cm, ancho 10 cm y alto 22 cm.

Si observamos el desarrollo vemos que está formado por seis rectángulos:

- dos de 15 cm x 22 cm.
- dos de 10 cm x 22 cm,
- y dos de 15 cm x10 cm

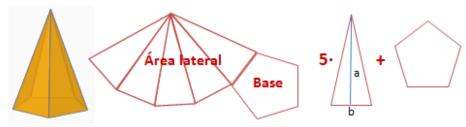
Área total =

 $2 \cdot 15 \cdot 22 + 2 \cdot 10 \cdot 22 + 2 \cdot 15 \cdot 10 = 1400 \text{ cm}^2$



Ejercicio: Calcula el área total de un prisma triangular regular de altura 27 cm y arista de la base 10 cm.

ÁREAS DE LAS PIRÁMIDES



En una pirámide regular en que la base sea un polígono regular de n lados:

Área lateral = n·b·a/2 = perímetro de la base · apotema/2

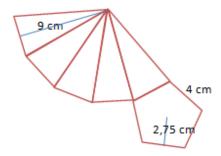
Área total = Área lateral + Área base

Área de una pirámide pentagonal de apotema 9 cm, lado de la base 4 cm y apotema de la base 2,75 cm.

Área lateral =
$$5.4.9/2$$
 = 90 cm²

$$\acute{A}rea\ base = 5.4.2,75/2 = 27,5\ cm^2$$

$$Área total = 90 + 27,5 = 117,5 cm2$$



Ejercicio: Calcula el área total de una pirámide cuadrangular regular de arista lateral 32 cm y arista de la base 19 cm.



3.2. Área de los cuerpos redondos

ÁREA DEL CILINDRO



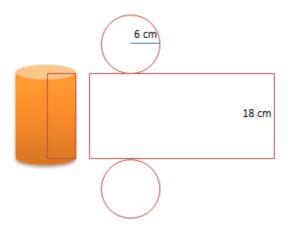
Área lateral = $2\pi r \cdot \mathbf{h}$ Área total = Área lateral + 2·Área de la base = $2\pi r \cdot \mathbf{h} + 2\pi r^2$

Un rectángulo de dimensiones 6x18 cm gira alrededor de su lado mayor, ¿cuál es el área del cilindro que genera?.

Perimetro de la base =
$$2 \cdot \pi \cdot 6$$
=3,14·12=
= 37,68 cm

Área base =
$$\pi \cdot 6^2 = 3.14 \cdot 36 = 113.04 \text{ cm}^2$$

Área total=678,24+2·113,04=904,32 cm²



ÁREA DEL CONO



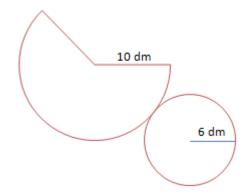
Área lateral = π rg Área total = Área lateral + Área de la base = π rg + π r²

Àrea del cono de generatriz 10 dm y radio de la base 6 dm.

 \acute{A} rea lateral = $\pi \cdot 6 \cdot 10 = 188,4 \text{ dm}^2$

Área base = $\pi \cdot 6^2$ = 113,04 dm²

Área total =188,4+113,04=301,44 dm²



ÁREA DE LA ESFERA: El área de la esfera es $4\pi R^2$.

El radio de Marte es 3397 km, y el de la Tierra es 6378 km. ¿Cuál es la superficie de cada planeta?. ¿Cuántas veces es mayor la superficie de la Tierra que la de Marte?.

Superficie Marte = $4 \cdot \pi \cdot 3397^2 = 144937489 \text{ km}^2$

Superficie Tierra = $4 \cdot \pi \cdot 6378^2$ = = 510926783 km²

510926783/144937489 = 3,5 Aproximadamente la superficie de la Tierra es 3,5 veces mayor que la de Marte.





Ejercicio: Calcula el área total de un cono de generatriz 25 cm y radio de la base 12 cm.

Ejercicio: Calcula la superficie de una esfera de radio 9 cm.



Ejercicio: Calcula el área total de un cilindro de generatriz 39 cm y radio de la base 12 cm.



4. EL VOLUMEN

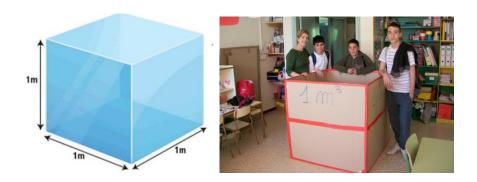
4.1. Unidades de volumen

El volumen de un cuerpo es la cantidad de espacio que ocupa.

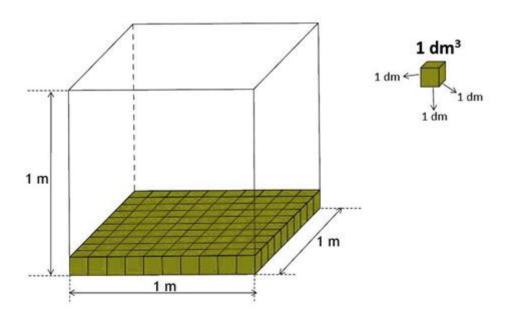
Medir el volumen de un cuerpo significa compararlo con una unidad de volumen conocida. ¿Qué unidades de volumen conoces?

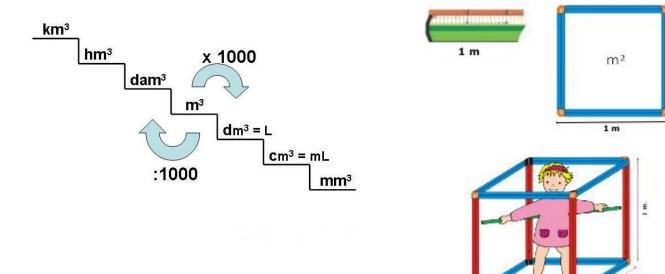


La unidad fundamental de volumen en el Sistema Internacional de medidas es el metro cúbico m³ y se define como el volumen de un cubo de un metro de arista.

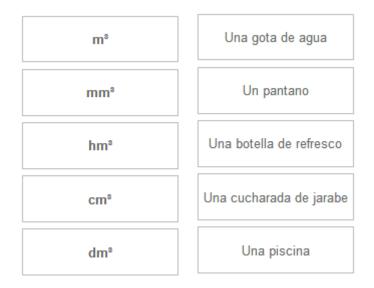


Para medir volúmenes muy grandes o muy pequeños, utilizamos los múltiplos o submúltiplos del m³. Por ejemplo el dm³, que es un cubo de 1 dm de arista. ¿Cuántos dm³ crees que caben en un m³?





Ejercicio: Indica la unidad que utilizarías para cada medida.



PASAR DE UNAS UNIDADES A OTRAS

Las unidades de volumen van de mil en mil.

- Para expresar un volumen dado en una determinada unidad en otra inferior, se multiplica por 1000 tantas veces como "saltos" haya que dar para llegar a la nueva unidad.
- Para expresar un volumen dado en una unidad en otra superior, se divide por 1000 tantas veces como "saltos" haya que dar para llegar a la nueva unidad.

Ejercicio: pasa a m^3 12,3 d m^3 12000 c m^3 7 h m^3 .

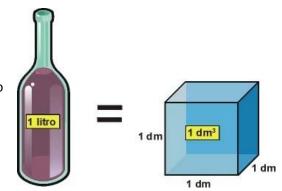
CAPACIDAD Y VOLUMEN

El volumen es la cantidad de espacio que ocupa un cuerpo y la capacidad es lo que cabe en un recipiente. Son dos términos que se encuentran estrechamente relacionados y en el lenguaje cotidiano se usan indistintamente.

La unidad más frecuente es el litro.

1 litro es la capacidad de un cubo de 1 dm de arista, por lo que equivale a 1 dm³.

Por lo tanto, 1 mL es lo mismo que 1 cm³.



Ejercicio: ¿Cuántos vasos de refresco de 250 cm³ cada uno se pueden llenar con una botella de 5 litros?

4.2. Volumen de cuerpos geométricos

Medir el volumen de un cuerpo consiste en ver cuántas veces cabe en él una unidad de volumen.

VOLUMEN DEL ORTOEDRO

Las cajas de zapatos, las peceras, etc., suelen tener forma de prisma.

Recuerda que estos cuerpos se llaman ortoedros.

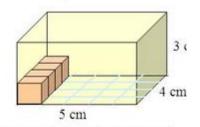
Observa esta caja. ¿Cuál es su volumen en cm3?

Rellenamos el primer piso con cm3

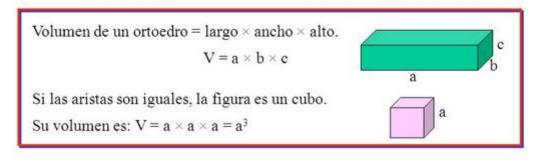
Caben
$$5 \times 4 = 20$$
.

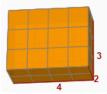
Como hay que poner 3 capas, se tiene:

$$(5 \times 4) \times 3 = 60$$
.



El volumen de la caja es 60 cm3





Ejercicio: ¿Cuál es el volumen de un ortoedro de lados 4 cm, 3 dm y 2 cm?

VOLUMEN DE PRISMAS Y CILINDROS

El volumen de un prisma es igual al área de la base por la altura.



La base de este prisma es un pentágono regular de lado 4 cm y apotema 2,75 cm. El área de la base es:

$$A_{base} = 5 \cdot 4 \cdot 2,75/2 = 27,5 \text{ cm}^2$$

Siguiendo un procedimiento similar al empleado en el caso del ortoedro, necesitariamos 27,5 cubitos de 1 cm⁸ para cubrir la base. Y si la altura del prisma es de 9 cm, para llenarlo hasta arriba hemos de hacer 9 pisos como la base. Por tanto el volumen será:

$$V = 27.5 \cdot 9 = 247.5 \text{ cm}^3$$

Si construimos un prisma con muchísimas caras laterales, cuantas más caras tiene más se parece a un cilindro. Un cilindro puede considerarse como un prisma en que el polígono de la base tiene infinitos lados, por eso para calcular su volumen podemos emplear el mismo procedimiento que con los prismas.



► El volumen de un cilindro es igual al área de la base por la altura.

Un depósito tiene forma cilíndrica de radio 80 cm y altura 1,50 m. Si está lleno de agua hasta la mitad, ¿cuántos litros contiene?.

Antes de calcular el volumen expresamos todas las medidas en las mismas unidades, por ejemplo en m:

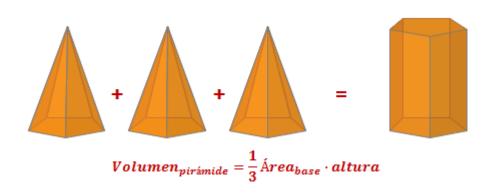
Volumen =
$$\pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 0,80^2 \cdot 1,50 = 3,0144 \text{ m}^3$$

La mitad son 1,5072 m³ = 1507,2 l

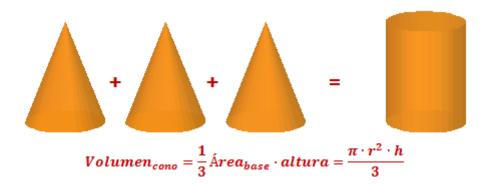
VOLUMEN DE PIRÁMIDES Y CONOS

El volumen e una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma con igual base y altura. Puedes comprobarlo en el siguiente enlace:

aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad05/pagina 25.html



Lo mismo ocurre con los conos y cilindros.

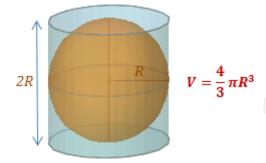


La pirámide de Giza es la mayor de las pirámides de Egipto que aún perdura, su base es un cuadrado de 230 m de lado y su altura mide 137 m. ¿Cuál es su volumen?

¿Cuántos cm³ de helado caben en un cono de 2,5 cm de radio y 15 cm de altura?

Área de la base =
$$\pi \cdot 2,5^2$$
 = 19,625 cm²
Volumen = 19,625·15/3 = 98,125 cm³

VOLUMEN DE LA ESFERA



Calcula el volumen de una esfera de radio 20 cm, expresa el resultado en litros.

Volumen =
$$4 \cdot \pi \cdot 20^3/3 = 4 \cdot 3,14 \cdot 8000/3 = 33493,33 \text{ cm}^3 = 33,49333 \text{ dm}^3$$

aproximadamente 33,5 litros

Ejercicios:

- Calcula el volumen de un prisma cuadrangular regular de altura 27 cm y arista de la base 14 cm.
- Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular de altura 29 cm y arista de la base 18 cm.
- Calcula el volumen de un cono de altura 24 cm y radio de la base 8 cm.
- Calcula el volumen de una esfera de radio 12 cm.

EJERCICIOS DE REPASO

 ¿Cuál es el precio de un cajón de embalaje de medidas 0,6 m × 0,4 m × 0,7 m si la madera con que está construido cuesta a 16 € el m².



- 2. Una sombrilla tiene forma de pirámide octogonal de 40 cm de arista de la base y 110 cm de arista lateral, ¿cuánta tela hace falta para fabricarla?
- 3. Se dice que en la antigüedad la pirámide de Keops estaba cubierta con láminas de oro. Imagina que estas láminas midieran 1 m² cada una. Si las dimensiones de esta pirámide son: lado de la base = 234 m y altura = 148 m, calcula el número de placas de oro necesarias para cubrirla.
- 4. Una caja de bombones tiene forma de prisma triangular de 28 cm de alto y 3 cm de arista de la base, ¿cuánto papel se necesita como mínimo para envolverla?
- 5. Una lata de conservas cilíndrica tiene 18 cm de alta y 8,6 cm de diámetro de la base, ¿qué cantidad de hojalata hace falta para construirla?
- 6. Sabiendo que el radio de la Tierra es 6370 km calcula la superficie usando como aproximación del valor de π : 3
- 7. Transforma en m³ las siguientes unidades de volumen:

a) 0,025 hm³

b) 43212 dm³

c) 0,012 km³

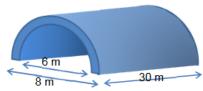
8. en litros:

a) 0,25 hm³

b) 3517 cm³

c) 32 m³

9 Calcula el volumen de hormigón que se ha empleado para hacer el túnel de la figura.



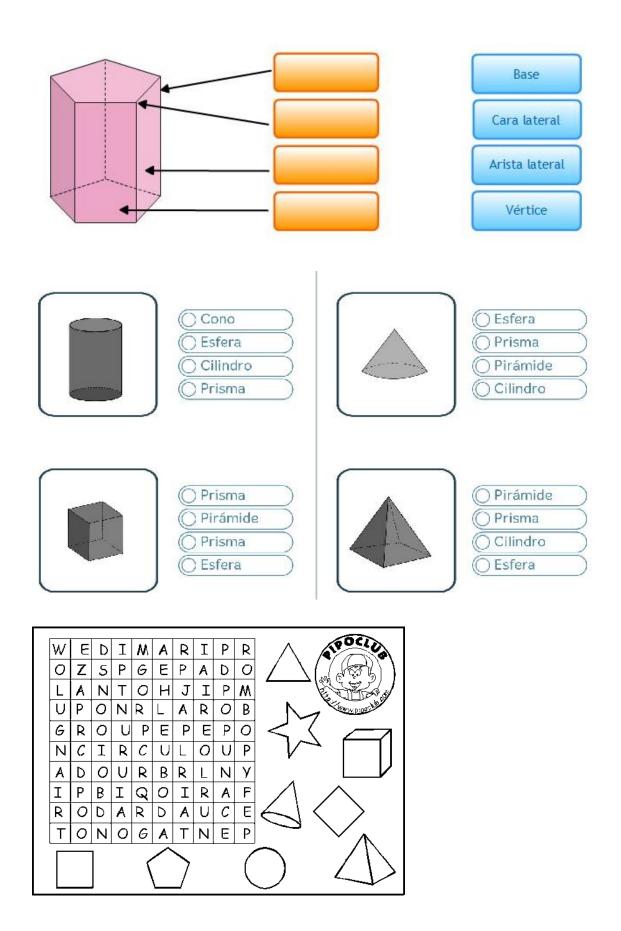
- 10. Un sótano rectangular cuya superficie es de 160 m² se ha inundado. El agua llega a 1,20 m de altura. Se extrae el agua con una bomba que saca 6 hl por minuto, ¿cuánto tiempo tardará en vaciarlo?
- 11. La densidad del acero es 7850 kg/m³, ¿cuánto pesará una bola maciza de acero de 3 cm de radio?
- 12. Quiero poner aire acondicionado en el salón de mi casa que tiene planta rectangular de 8,2 m de largo por 3,6 m de ancho y 2,5 m de altura. Me han dicho que se necesitan 50 frigorías por m³, ¿cuántas frigorías deberá producir el aparato que he de instalar?
- 13. Un cubo de 16 cm de arista está completamente lleno de agua, ¿cuánta contiene? Introducimos una esfera de 8 cm de radio, ¿qué cantidad de agua se derrama?

Completa el siguiente cuadro con los sólidos platónicos:

Nombre del sólido platónico	Número de Vértices (V)	Número de Caras (C)	Número de Aristas (A)	V+C-A =

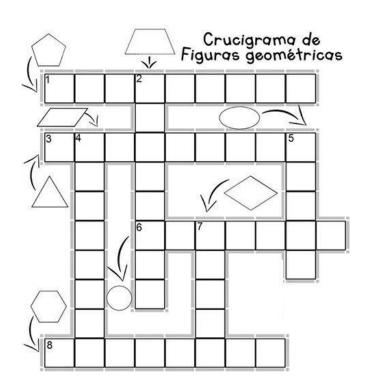






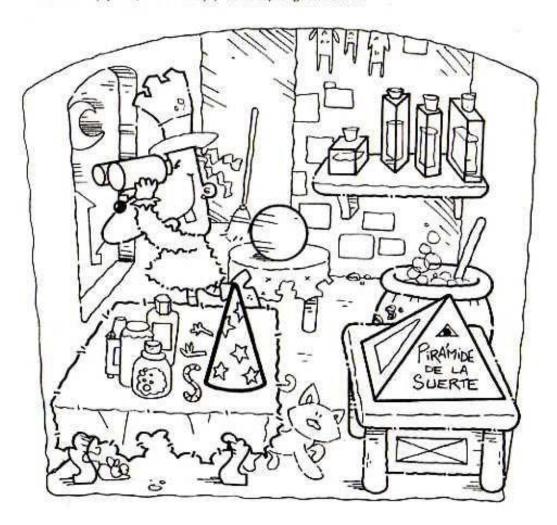
RECORTÁ LAS FIGURITAS DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS Y
 PEGALOS EN EL LUGAR QUE LE CORRESPONDE A CADA UNA





Llegan los cuerpos geométricos

Buscá y pintá, en el dibujo, los cuerpos geométricos.



 Escribí los nombres de los cuerpos geométricos que conocés y dibujalos en tu cuaderno.

NOMBRE	DIBUJO	DESARROLLO	ÁREA	VOLUMEN
Cubo o Hexae- dro: ortoedro donde las tres dimensiones son iguales.	a		A=6a ²	V=a ³
Paralelepípedo u ortoedro: prisma cuyas bases son dos rectángulos.	a b	b a c	A=2(ab+ac+bc)	V=abc
Cilindro: es el cuerpo geomé- trico engendrado por la revolución de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.		H 2nR	A=2∏r(H+r)	V=∏r ² •H
Pirámide: Cuerpo geomé- trico cuya base es un polígono cualquiera y sus caras laterales triangulos.		B	A=A _{base} + A _{lateral}	V= 1/3 B*H
Cono: Es el cuerpo geo- mérico engen- rado por la revolución de un triangulo rectán- gulo alrededor de uno.	HG	GR	A=A _{base} + A _{lateral}	$V = \frac{1}{3} \prod r^2 \cdot H$
Esfera: cuerpo geométrico engendrado por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.	R.T.B.T.		A=4∏R ²	$V = \frac{4}{3} \Pi R^3$

