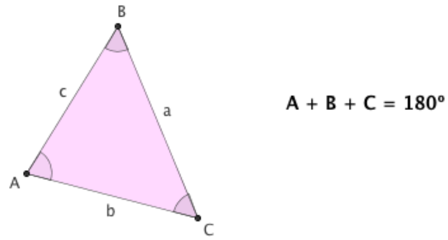
CONTENIDOS:

- Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras.
- El teorema de Tales. Criterios de semejanza de triángulos.
- Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Aplicación y reducción de figuras. Factor de escala. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Homotecia.
- Escalas y planos. Uso de instrumentos de dibujo para la realización de planos sencillos.
- Utilización de los teoremas de Tales y de Pitágoras para obtener medidas.

Contenidos mínimos:

- Identificar los distintos tipos de triángulos, en especial los triángulos rectángulos.
- Aplicar el teorema de Pitágoras para calcular alguno de los lados de un triángulo rectángulo.
- Reconocer segmentos proporcionales y calcular la razón de proporcionalidad de los mismos.
- Aplicar el teorema de Tales al cálculo de longitudes desconocidas.
- Reconocer figuras semejantes, en especial triángulos o polígonos en general.
- Utilizar el concepto de escala para efectuar cálculos sobre planos o mapas.

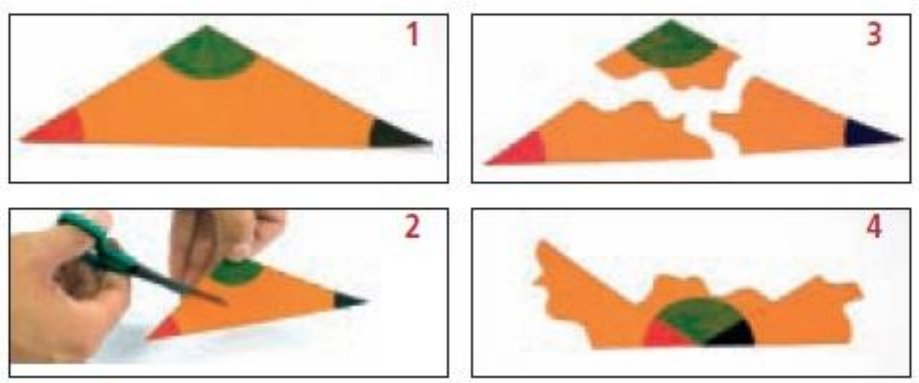
1. TIPOS DE TRIÁNGULOS



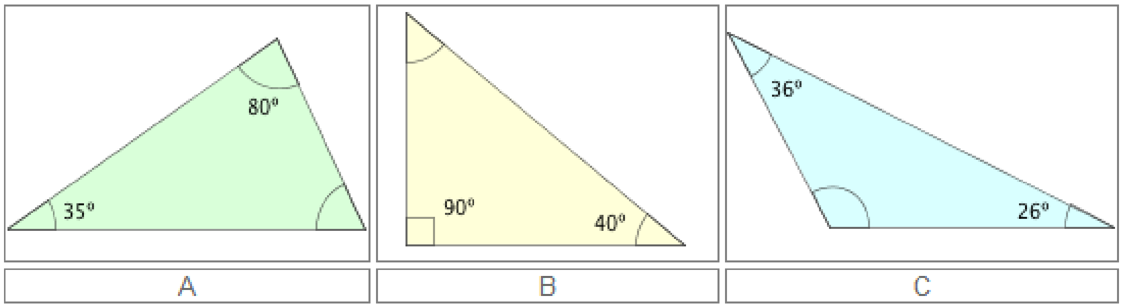
1.1. Propiedad importante de los triángulos

Los ángulos internos de un triángulo siempre suman 180º.

Ejercicio: Dibuja un triángulo en un folio, y colorea sus ángulos. Corta el triángulo en tres trozos y une los ángulos. Verás como forman 180º.

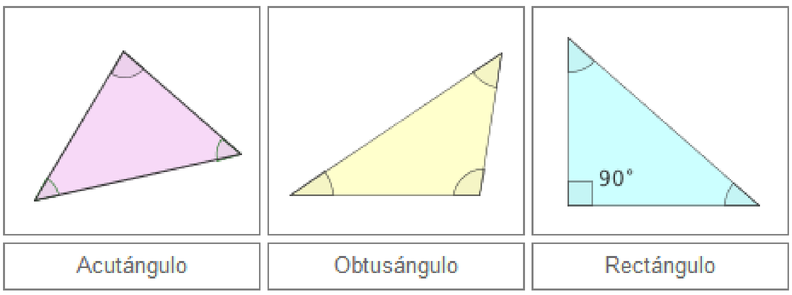


Ejercicio: Completa los ángulos que faltan en los triángulos siguientes.



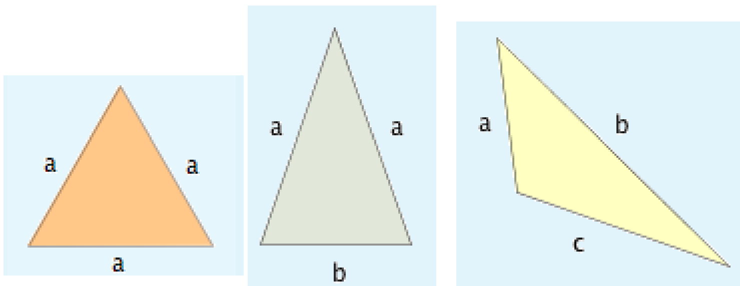
1.2. Tipos de triángulos según sus ángulos

- **Acutángulo:** los tres ángulos son agudos, menores que 90º.
- **Obtusángulo:** tiene un ángulo obtuso, mayor que 90º.
- **Rectángulo:** tiene un ángulo recto, igual a 90º.



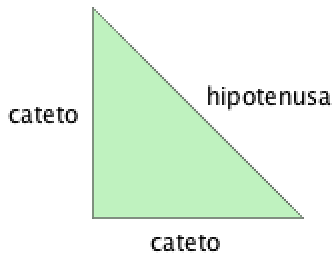
Además de según sus ángulos, los triángulos pueden ser según sus lados:

- **Equiláteros:** los tres lados iguales.
- **Isósceles:** dos lados iguales y el tercero desigual.
- **Escaleno:** los tres lados son distintos.



2. EL TEOREMA DE PITÁGORAS

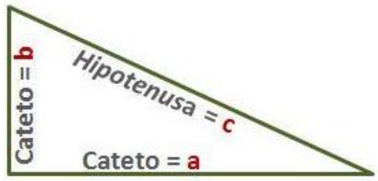
2.1. El teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, los lados que determinan el ángulo de 90º se llaman catetos, y el lado mayor hipotenusa.

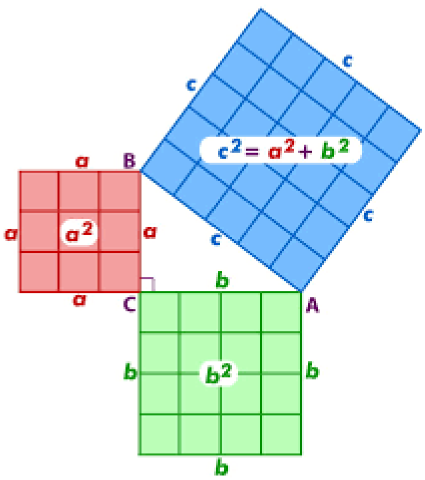
El teorema de Pitágoras dice:

> "En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".



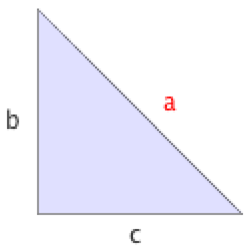
$$a^2 + b^2 = c^2$$

2.2. Interpretación geométrica



Si dibujamos un cuadrado sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras afirma que el correspondiente a la hipotenusa es igual a la suma de los trazados sobre los catetos.

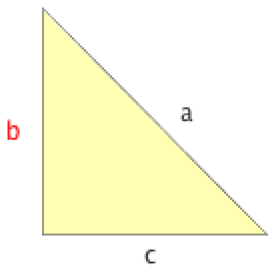
Se puede calcular la hipotenusa conocidos los catetos, realizando simplemente una raíz cuadrada:



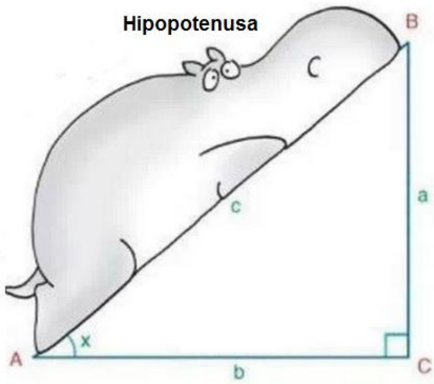
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Para calcular un cateto conocida la hipotenusa y otro cateto, se despeja primero el cateto que queremos conocer y luego realizamos la raíz cuadrada:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$



- https://www.youtube.com/watch?v=1er3cHAWwIM
- https://www.youtube.com/watch?v=Xj-4EUPx3A4
- https://www.youtube.com/watch?v=rBmG03hwe8Q
- *http://aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad04/pagina_7.html*



Ejercicios:

En un triángulo rectángulo los catetos miden 2,8 cm y 5,4 cm. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

En un triángulo rectángulo un cateto mide 9 cm y la hipotenusa 15 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

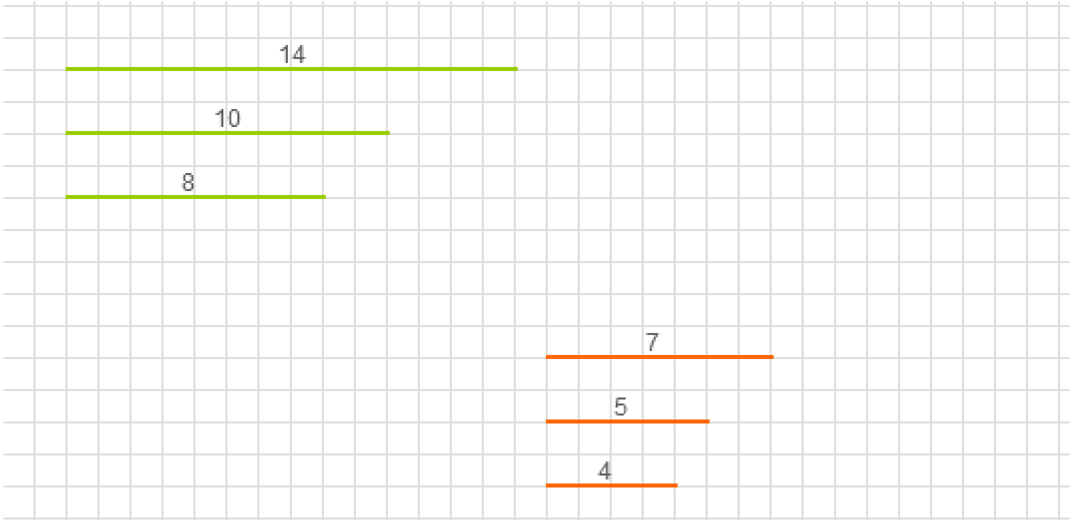
¿Puede existir un triángulo rectángulo con los dos catetos iguales?

En un triángulo rectángulo uno de los ángulos es igual a 35º. ¿Cuánto valen los otros dos?

Los lados de un rectángulo miden 15,1 m y 9 m. ¿Cuánto mide la diagonal?

http://aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad04/pagina_8.html

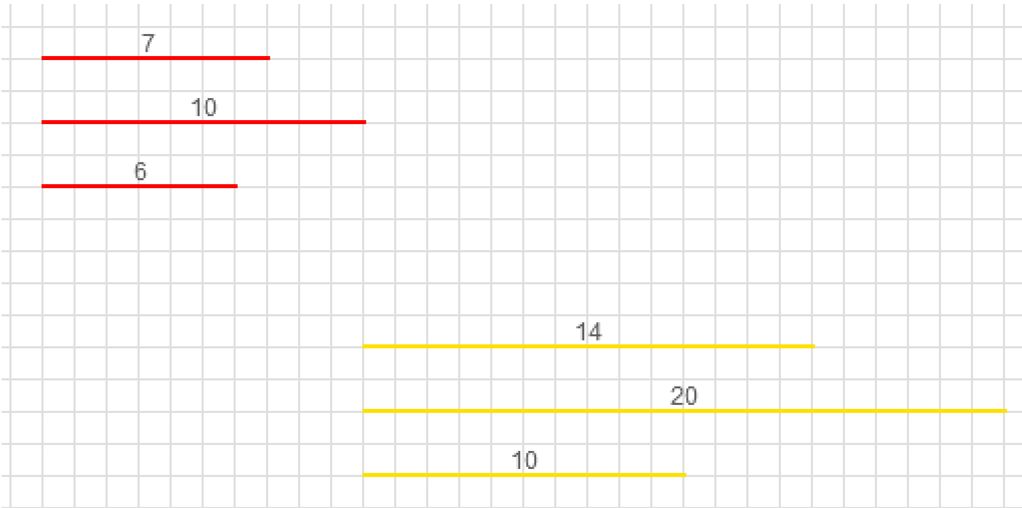
3. SEGMENTOS PROPORCIONALES. TEOREMA DE TALES



Los segmentos de color verde **son proporcionales** a los segmentos de color naranja ya que:

$$\frac{14}{7} = \frac{10}{5} = \frac{8}{4} = 2$$

Es decir, se mantiene siempre **igual la razón que hay entre sus longitudes**. En este caso cada uno de los segmentos de color verde es el doble de su correspondiente segmento naranja.



Los segmentos de color rojo **no son proporcionales** a los segmentos de color amarillo ya que:

$$\frac{7}{14} = \frac{10}{20} \neq \frac{6}{10}$$

Es decir, **no se mantiene siempre igual la razón que hay entre sus longitudes**, la tercera pareja de segmentos no mantiene la proporción de las dos primeras.

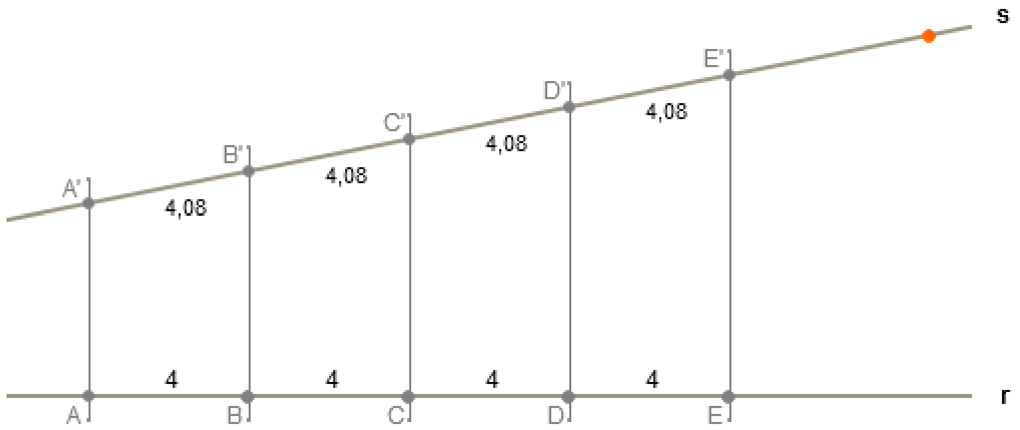
La razón que se mantiene constante en los segmentos proporcionales se llama razón de proporcionalidad.

Calcular **x** para que los segmentos sean proporcionales:

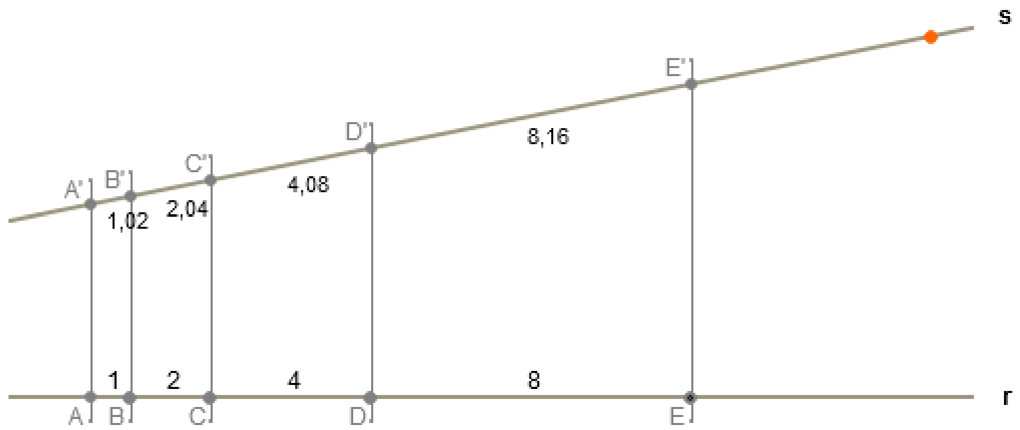
3.1. Teorema de Tales

PROPIEDADES PREVIAS

Si varias rectas paralelas determinan segmentos iguales en una recta r, también determinan segmentos iguales en cualquier otra recta s a la que corten.



Si varias rectas paralelas determinan segmentos proporcionales en una recta r, también determinan segmentos proporcionales, con la misma razón de proporcionalidad, en cualquier otra recta s a la que corten.



http://aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad04/pagina_9.html

EL TEOREMA

Estas propiedades anteriores son casos particulares del Teorema de Tales.

"Varias rectas paralelas que cortan a dos rectas cualesquiera, determinan sobre éstas segmentos proporcionales".

☞ aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad04/pagina_13.html

Estas rectas cualesquiera pueden formar triángulos, que se dice que están en la posición de Tales, y entonces se dice que son semejantes.

Ejercicios:

Calcula el valor de x para las siguientes figuras:

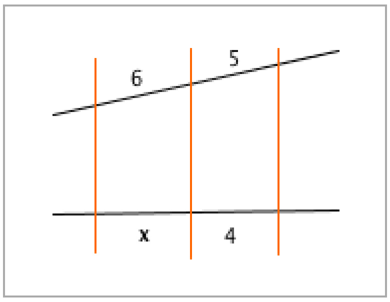


FIGURA A

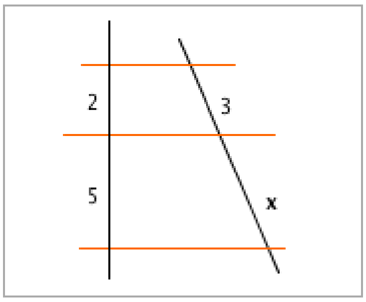


FIGURA B

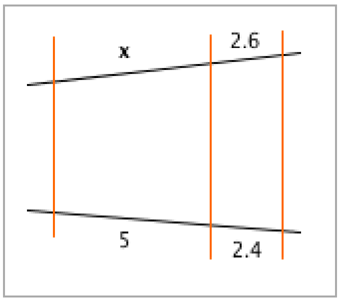
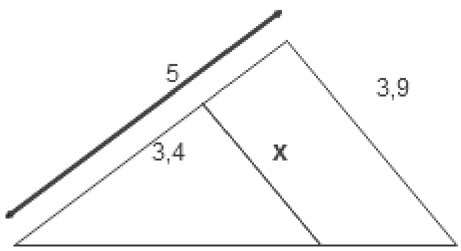


FIGURA C

EJERCICIO RESUELTO

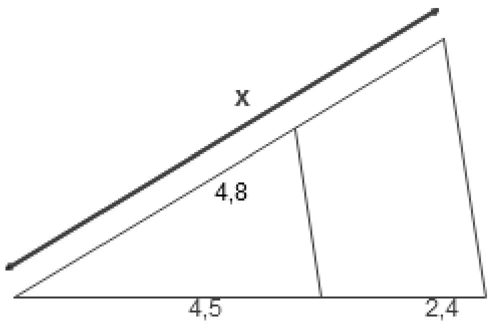


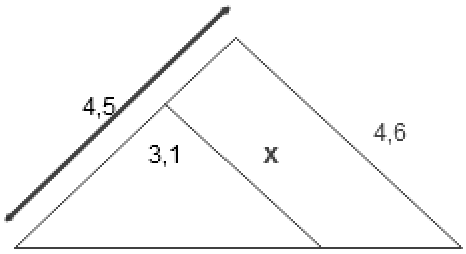
Los dos triángulos están en **posición de Tales**. Sus lados serán **proporcionales:**

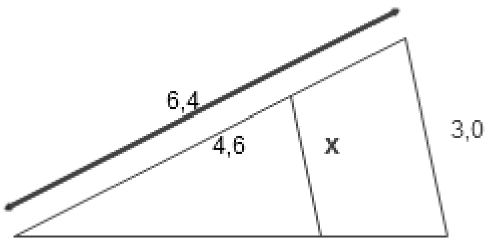
$$\frac{5}{3{,}4} = \frac{3{,}9}{x}$$

de donde: $5 \cdot x = 3{,}4 \cdot 3{,}9$

y entonces: $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{3{,}4 \cdot 3{,}9}}{\mathbf{5}} = \mathbf{2{,}65}$







3.2. Aplicaciones

DIVISIÓN DE UN SEGMENTOS EN PARTES IGUALES

Observa cómo se hace, en el siguiente enlace: http://aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad04/pagina_10.html

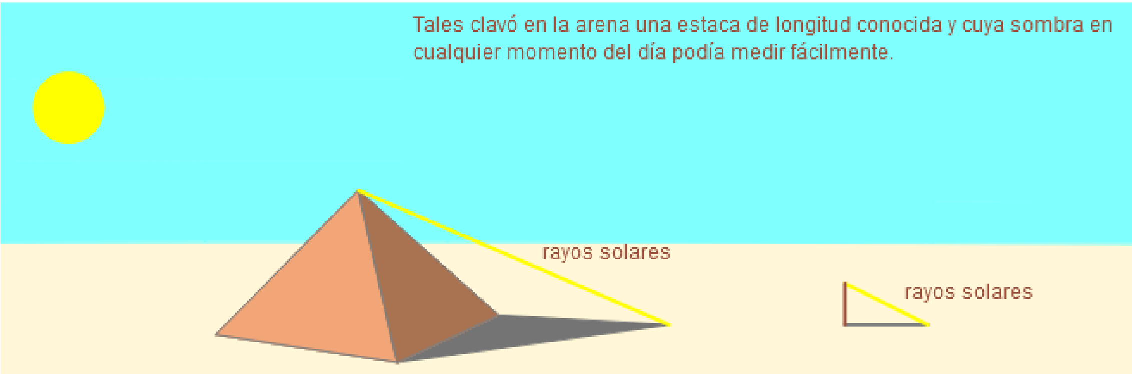
REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS FRACCIONARIOS

Observa cómo se hace en el siguiente enlace:

http://aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad04/pagina_16.html

TALES Y LA GRAN PIRÁMIDE

El teorema de Tales se utiliza frecuentemente para el cálculo de distancias inaccesibles. El mismo Tales lo usó para calcular la altura de una gran pirámide:

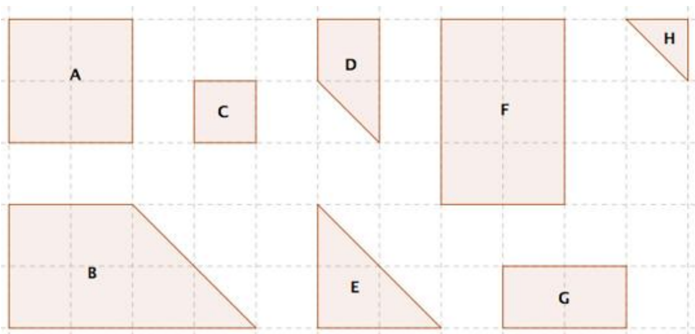


4. SEMEJANZA

Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma e igual o distinto tamaño. La relación que hay entre los tamaños de dos figuras semejantes se llama razón de semejanza.

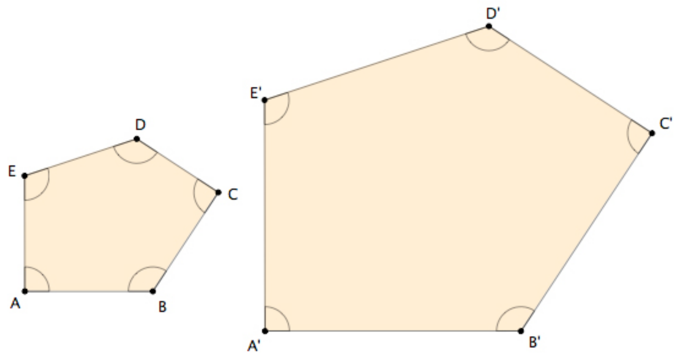
Este concepto se usa mucho en la vida cotidiana: las reducciones de tamaño para pintar un cuadro, las ampliaciones de fotos originales, mapas, planos de edificios, etc.

Ejercicio: De entre las siguientes figuras poligonales elige las parejas que parezcan semejantes.



4.1. Polígonos semejantes

Dos polígonos son semejantes si todas sus parejas de lados homólogos guardan la misma proporción y sus ángulos internos son iguales.



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA} = r$$

$$\hat{A} = \hat{A'} \quad \hat{B} = \hat{B'} \quad \hat{C} = \hat{C'} \quad \hat{D} = \hat{D'} \quad \hat{E} = \hat{E'}$$

El número **r** se llama **razón de semejanza**

Ejercicios:

En un cuadrilátero los lados miden a = 16 cm, b = 18 cm, c = 12 cm y d = 22 cm. En un cuadrilátero semejante al anterior, el lado c' = 18 cm, ¿cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto miden a', b' y d'?

¿Dos rectángulos cualesquiera son semejantes?

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS SEMEJANTES

Puedes ver cómo dibujar un polígono semejante en el siguiente enlace:

http://aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad04/pagina_23.html

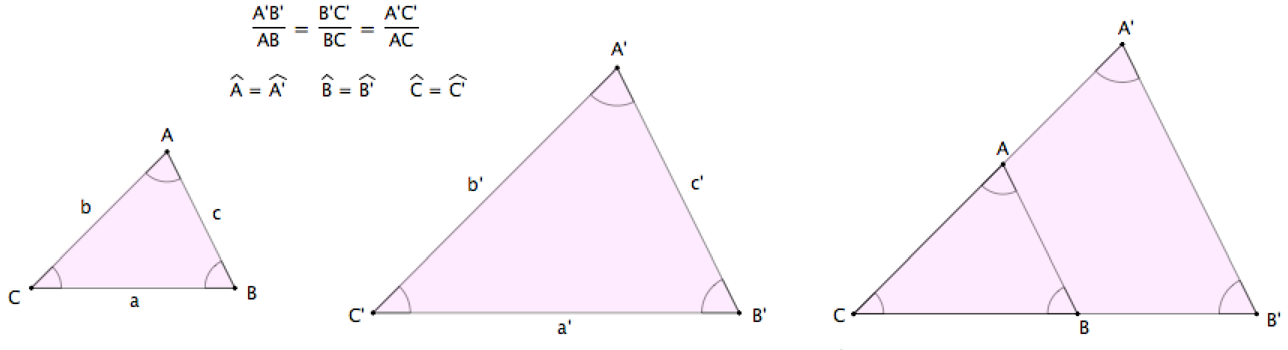
4.2. Triángulos semejantes

Los triángulos son polígonos de tres lados, por lo tanto dos triángulos serán semejantes si se cumplen las condiciones vistas anteriormente, es decir, sus tres parejas de lados homólogos son proporcionales y sus tres parejas de ángulos internos son iguales.

Sin embargo, en los triángulos si se cumple una de las dos condiciones, también se cumple la otra. En cualquiera de los dos casos anteriores, se pueden poner los triángulos en posición de Tales, lo que garantiza que sean semejantes.

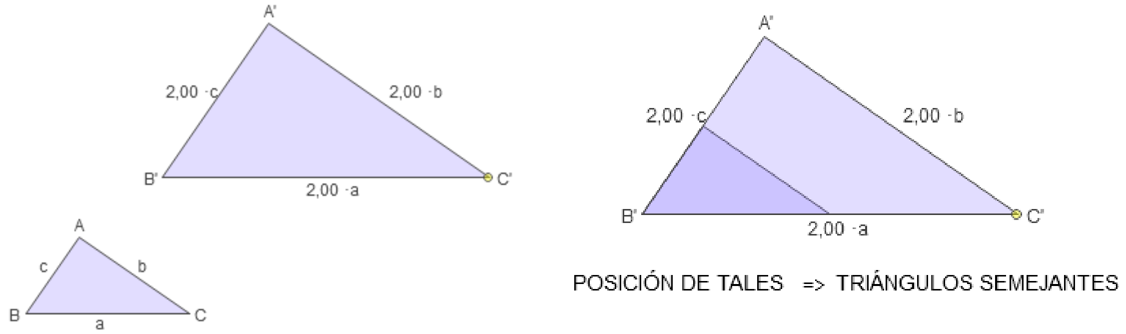
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$\hat{A} = \hat{A'} \quad \hat{B} = \hat{B'} \quad \hat{C} = \hat{C'}$$

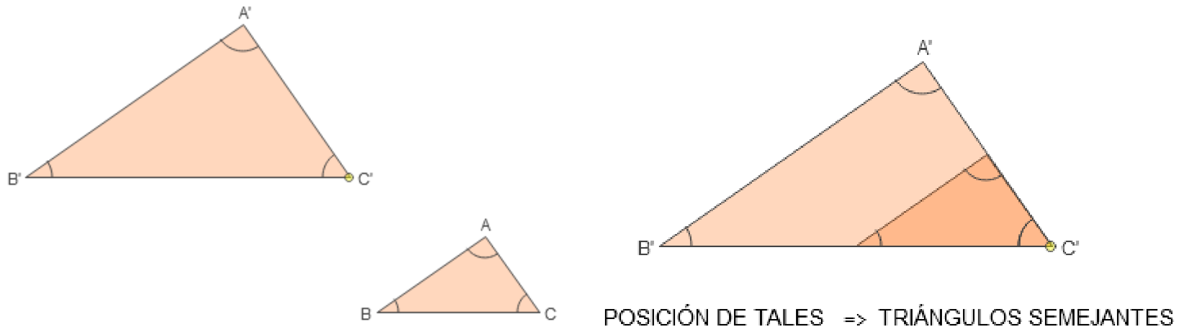


CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

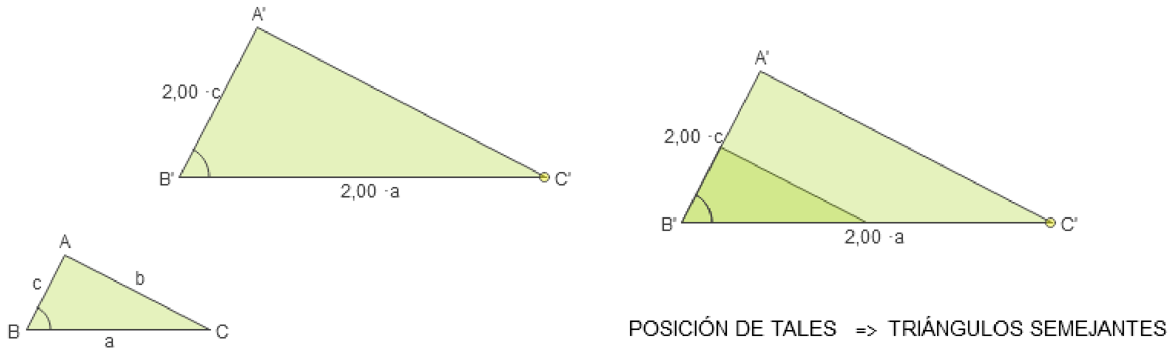
- **Primer criterio de semejanza:** Si las tres parejas de lados guardan la misma proporción, los triángulos son semejantes.



- **Segundo criterio de semejanza:** Si las tres parejas de ángulos homólogos son iguales, los triángulos son iguales. En realidad basta que coincidan dos parejas, ya que eso implicará que la tercera pareja también lo será.



- **Tercer criterio de semejanza:** Si dos parejas de lados homólogos guardan la misma proporción y el ángulo que forman dichos lados es igual, los triángulos son semejantes.



http://aula2.educa.aragon.es/datos/espad/MateTecno/bloque2/Unidad04/pagina_22.html

Ejercicio: Relaciona los siguientes triángulos basándote en los criterios de semejanza (hay cinco parejas de ángulos semejantes).

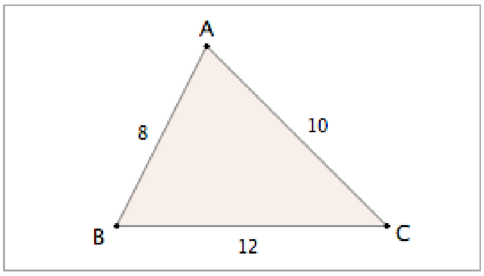


FIGURA A

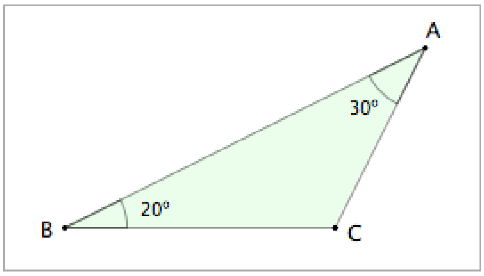


FIGURA B

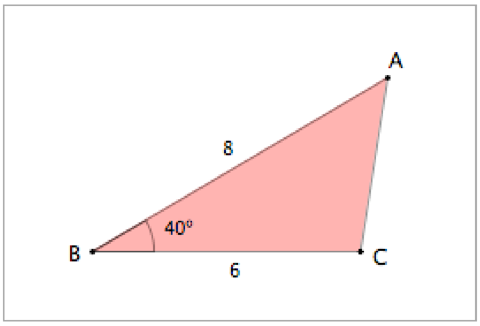


FIGURA C

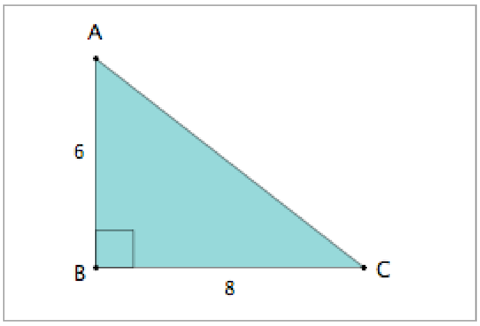


FIGURA D

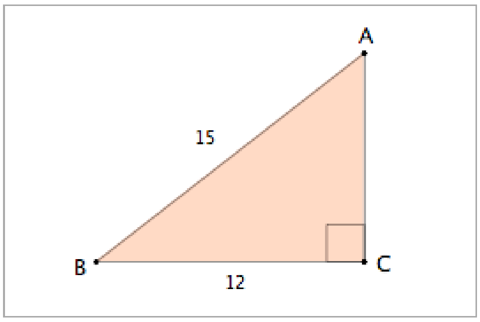


FIGURA E

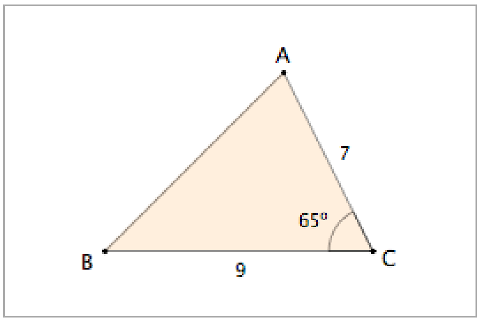


FIGURA F

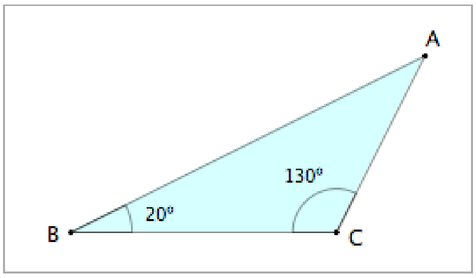


FIGURA G

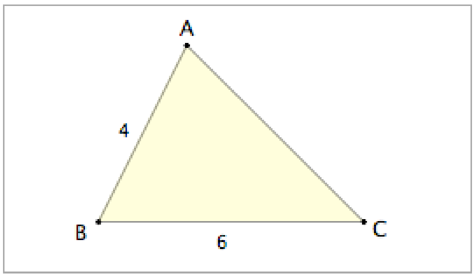


FIGURA H

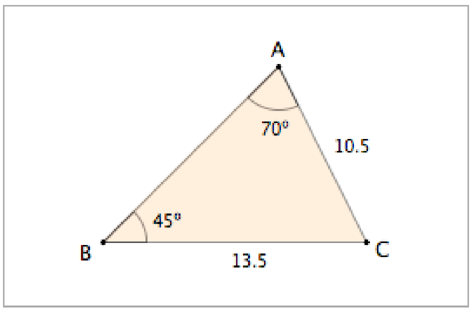


FIGURA I

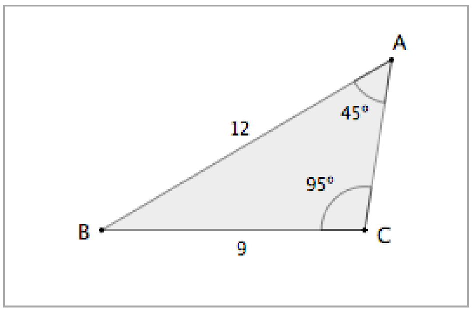


FIGURA J

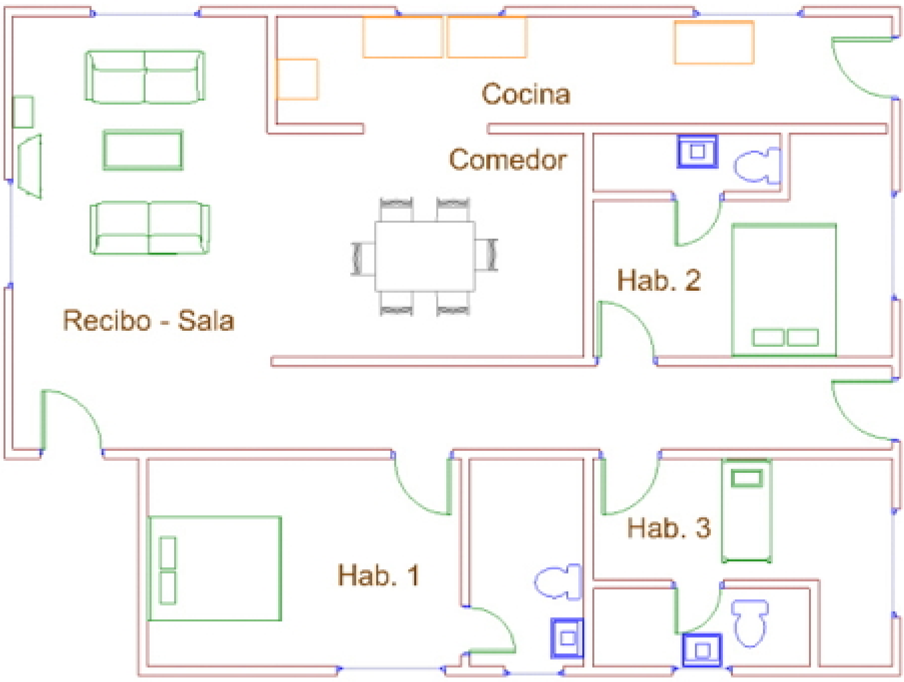
5. ESCALAS

Llamamos escala al cociente entre la medida de una representación de la realidad y su medida real.

Por ejemplo, cuando hablamos de 1:100 queremos decir que una unidad en la imagen equivale a 100 unidades en la realidad.

El siguiente plano está a escala **1:120**. la cocina tiene 7,7 cm. de largo, es decir 7,7x120 = 924 cm. o 9,24 metros. Su ancho, es de 1,3 cm. es decir, 1,3x120 = 156 cm. o 1,56 metros. En consecuencia, la superficie de la cocina es:

$$9{,}24 \times 1{,}56 = 14{,}41 \text{ m}^2 \text{ (metros cuadrados)}$$



Ejercicio:

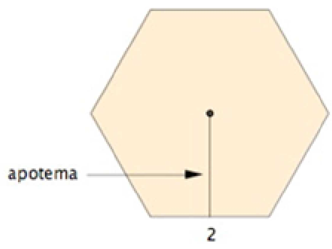
Dibuja un plano de salón cuadrado, que mide dos metros de largo y cuatro de ancho, en tu cuaderno. Indica qué escala vas a usar.

Quieres poner en el centro del salón una mesa de un metro de ancho y dos metros de largo. Dibújala en el salón anterior, respetando la escala.

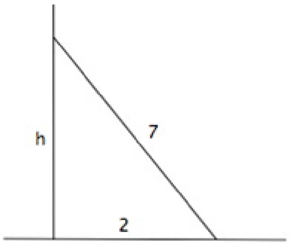
En un mapa a escala 2:50 000 la distancia entre dos puntos es 30 cm. ¿A qué distancia real están?

EJERCICIOS DE REPASO

1. Calcula la apotema de un hexágono regular de lado 2 cm.

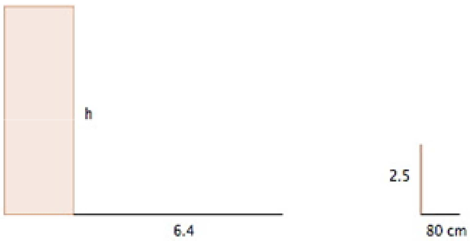


2. Una escalera de 7 metros de longitud está apoyada en una pared. El pie de la escalera está situado a una distancia de 2 metros de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera?

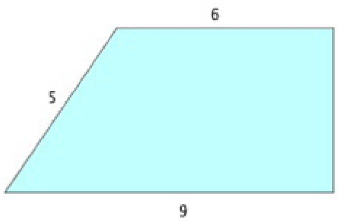


3. Los lados de un triángulo miden 6, 9 y 11 cm. ¿Se trata de un triángulo rectángulo?

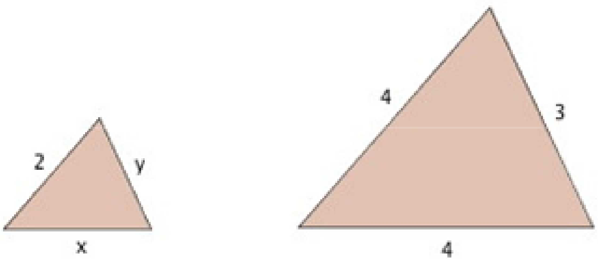
4. A la misma hora que un poste de 2.5 m. de altura proyecta una sombra de 80 cm. un edificio proyecta una sombra de 6.4 m. ¿Qué altura tiene dicho edificio?



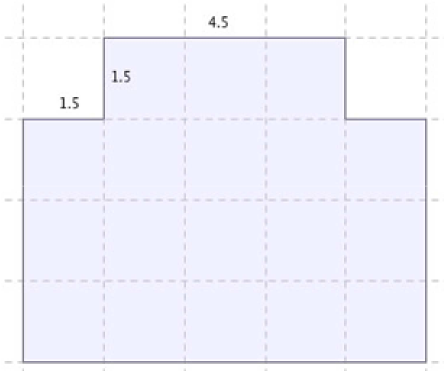
5. Calcular el perímetro del trapecio de la figura:



6. Calcular "x" e "y" en la siguiente pareja de triángulos semejantes:

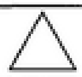
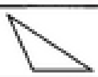
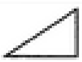
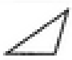
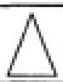


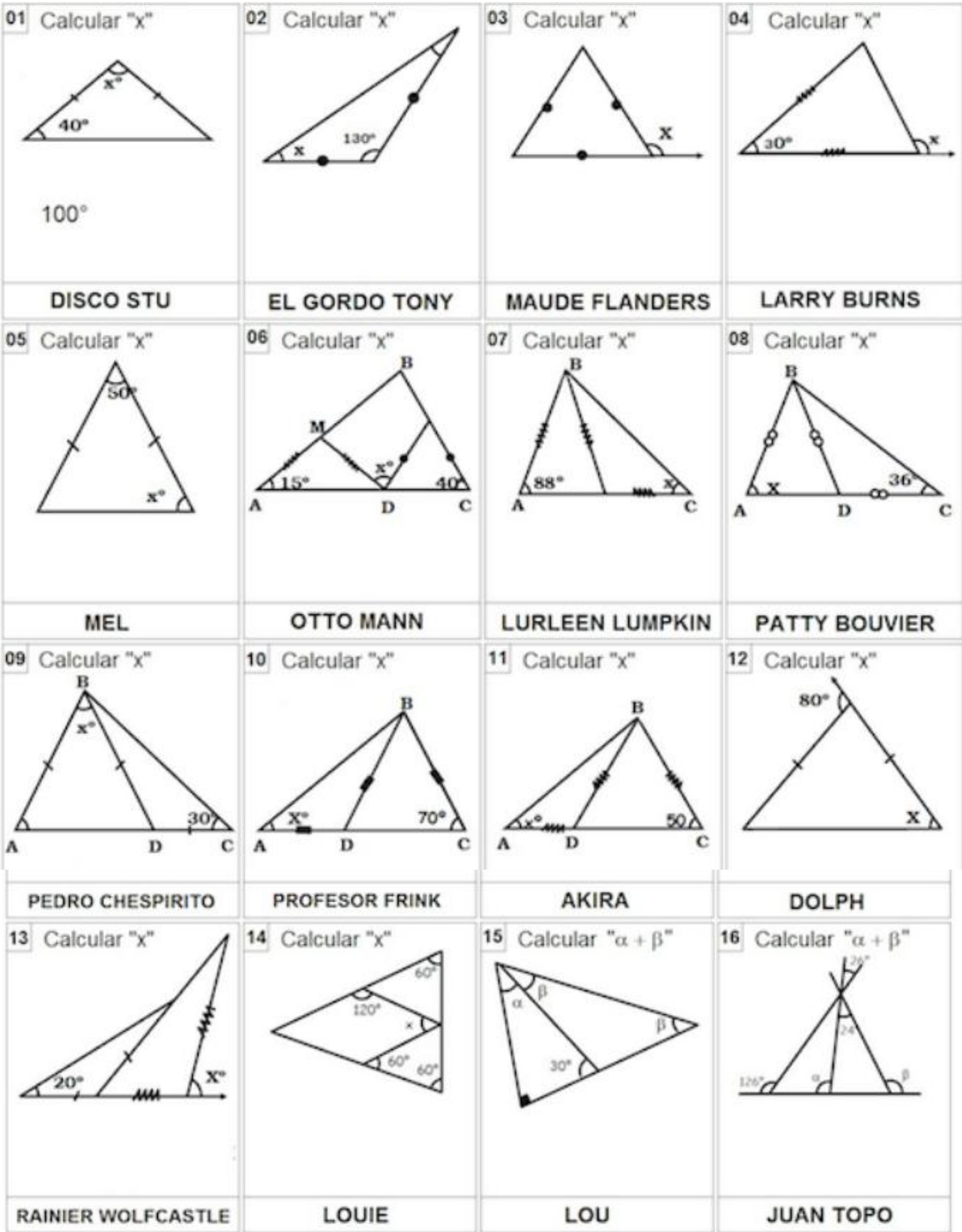
7. Sabemos que esta parcela esta dibujada en centímetros, a escala 1:1750. Calcula cuántos metros de valla necesitamos para cercarla.

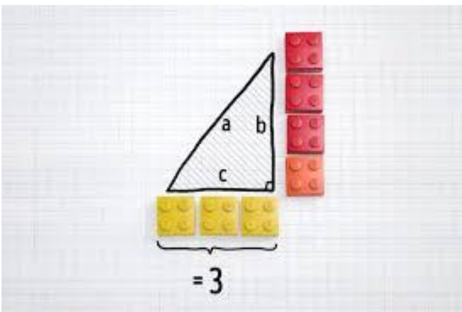


8. En esta pequeña porción del plano de Zaragoza, desde el punto A hasta el punto B hay 7,8 cm. ¿A qué escala está hecho el plano si la distancia real es de 1170 metros?

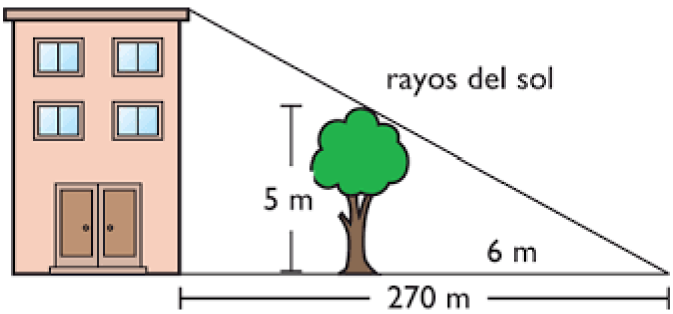
Llena la tabla de abajo recortando y pegando los recuadros de la derecha.

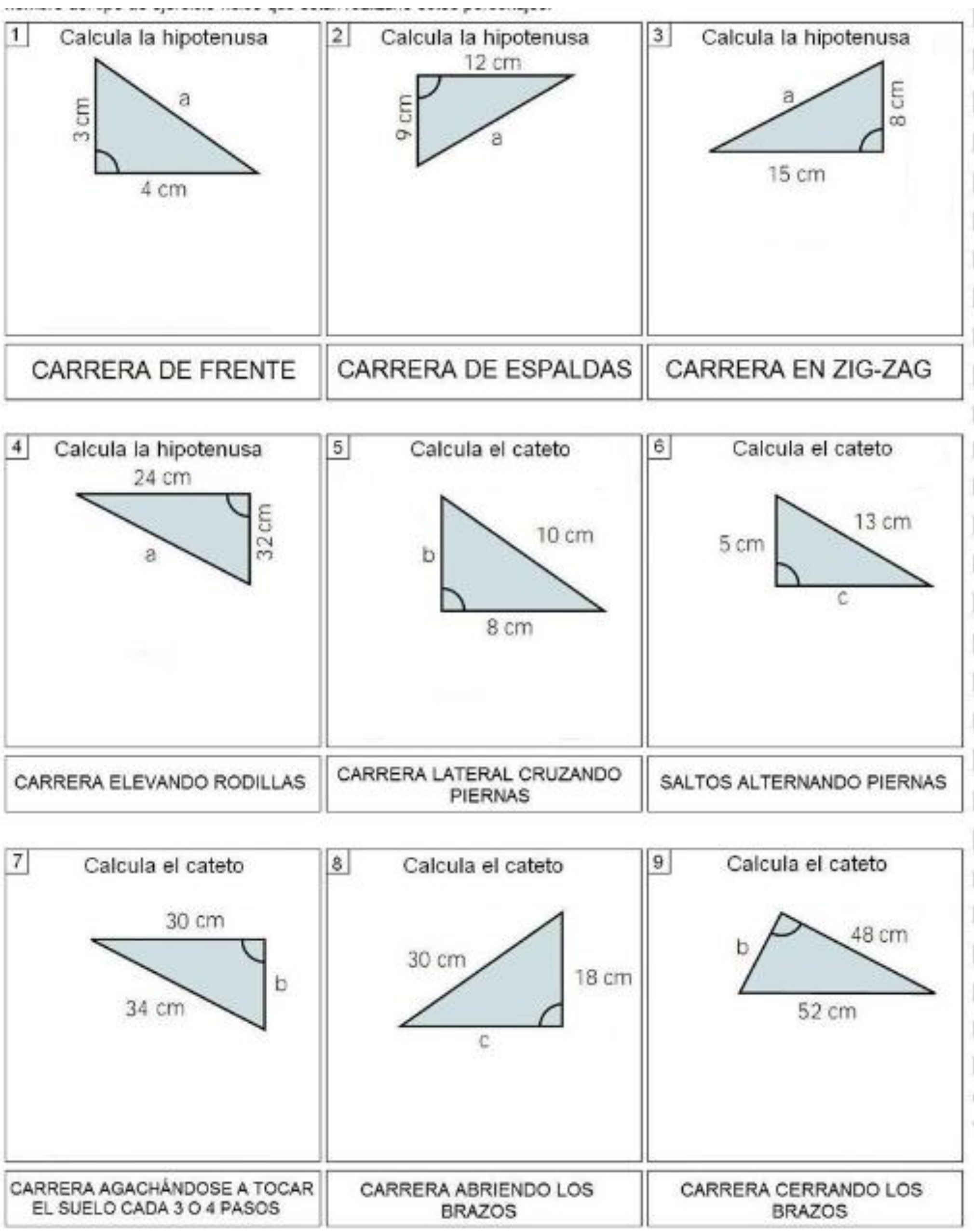
	Lados	Angulos iguales	Angulos rectos	Ejes de simetría
				
				
				
				
				

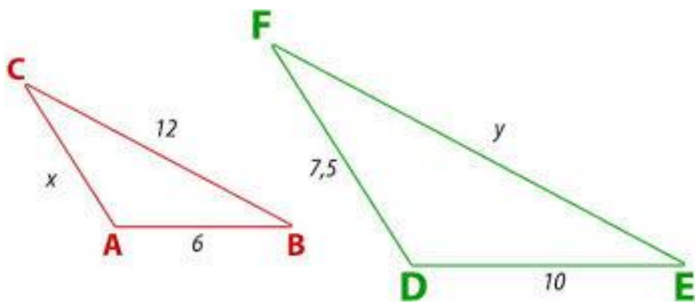

01 Calcular "x"
x°
40°
100°
DISCO STU
02 Calcular "x"
x
130°
EL GORDO TONY
03 Calcular "x"
X
MAUDE FLANDERS
04 Calcular "x"
30°
x
LARRY BURNS
05 Calcular "x"
50°
x°
MEL
06 Calcular "x"
B
M
x°
15°
40°
A
D
C
OTTO MANN
07 Calcular "x"
B
88°
x
A
C
LURLEEN LUMPKIN
08 Calcular "x"
B
X
36°
A
D
C
PATTY BOUVIER
09 Calcular "x"
B
x°
30°
A
D
C
PEDRO CHESPIRITO
10 Calcular "x"
B
X°
70°
A
D
C
PROFESOR FRINK
11 Calcular "x"
B
x°
50
A
D
C
AKIRA
12 Calcular "x"
80°
X
DOLPH
13 Calcular "x"
20°
X°
RAINIER WOLFCASTLE
14 Calcular "x"
60°
120°
x
60°
60°
LOUIE
15 Calcular "α + β"
α
β
β
30°
LOU
16 Calcular "α + β"
24°
126°
α
β
JUAN TOPO


a
b
c
= 3


72°
35°
40°
75°
65°
20°
60°
REYNALDO CARTOLIN R.
125°
25°
80°
120°
25°
44°
105°
204°


rayos del sol
5 m
6 m
270 m


1 Calcula la hipotenusa
3 cm
a
4 cm
CARRERA DE FRENTE
2 Calcula la hipotenusa
12 cm
9 cm
a
CARRERA DE ESPALDAS
3 Calcula la hipotenusa
a
8 cm
15 cm
CARRERA EN ZIG-ZAG
4 Calcula la hipotenusa
24 cm
32 cm
a
CARRERA ELEVANDO RODILLAS
5 Calcula el cateto
10 cm
b
8 cm
CARRERA LATERAL CRUZANDO PIERNAS
6 Calcula el cateto
13 cm
5 cm
c
SALTOS ALTERNANDO PIERNAS
7 Calcula el cateto
30 cm
b
34 cm
CARRERA AGACHÁNDOSE A TOCAR EL SUELO CADA 3 O 4 PASOS
8 Calcula el cateto
30 cm
18 cm
c
CARRERA ABRIENDO LOS BRAZOS
9 Calcula el cateto
b
48 cm
52 cm
CARRERA CERRANDO LOS BRAZOS


C
12
x
A
6
B
F
y
7,5
D
10
E

La extensión urbana de Cáceres es aproximadamente de 49 kilómetros cuadrados. ¿Qué superficie tiene en un mapa a escala 1:200.000?.

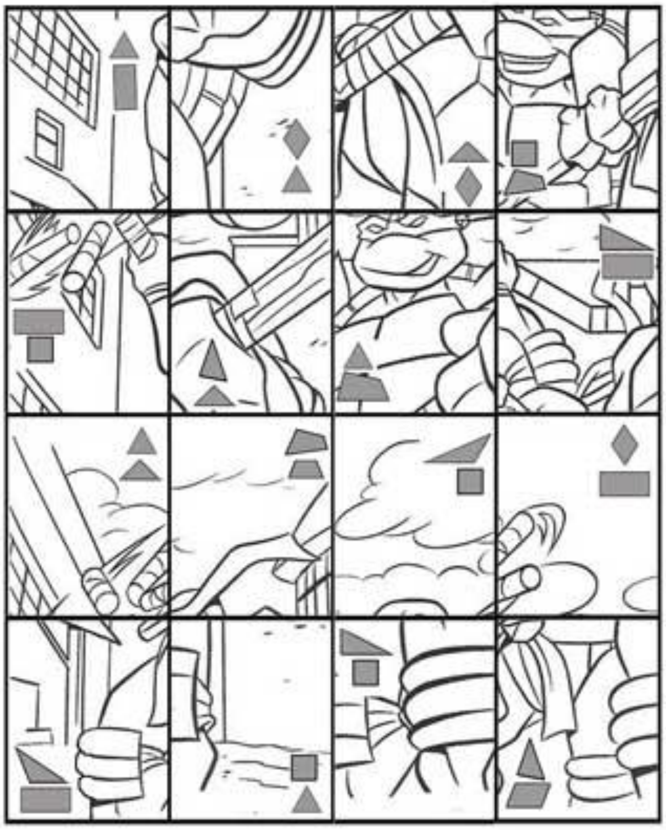
Nombre: ______________________ Fecha: __________

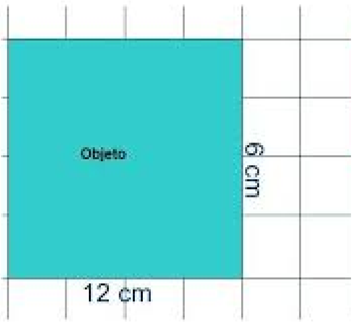
TRIÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS

Triángulo equilátero y un Triángulo isósceles	Rombo y un rectángulo	Triángulo obtusángulo y un cuadrado	No Paralelogramo y un paralelogramo
rectángulo y un	Triángulo rectángulo y un rectángulo	Un triángulo equilátero y un cuadrilátero	Triángulo acutángulo y un Triángulo isósceles
Triángulo equilátero y un rectángulo	Un cuadrado y un no paralelogramo	Triángulo isósceles y un Rombo	Rombo y un Triángulo equilátero
Triángulo escaleno y un rectángulo	Triángulo acutángulo y un paralelogramo	Triángulo rectángulo y un cuadrado	cuadrado y un Triángulo equilátero

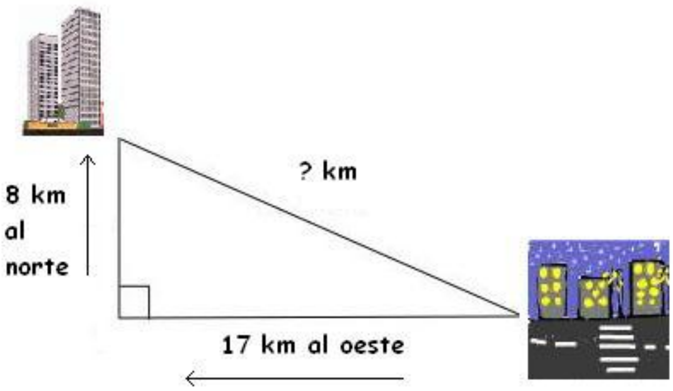
www.actiludis.com

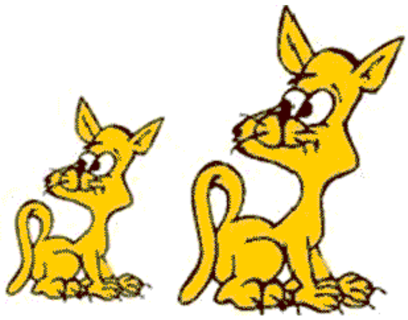
Para hacer este puzzle tienes que tener muy en cuenta las figuras que forman pareja, ya que dentro de los cuadrilateros y de los triángulos hay de distintos tipos.





Reduce este objeto a escala 1:2. Indica los cálculos necesarios para saber las nuevas medidas y dibújalo en la nueva escala.





Figuras semejantes

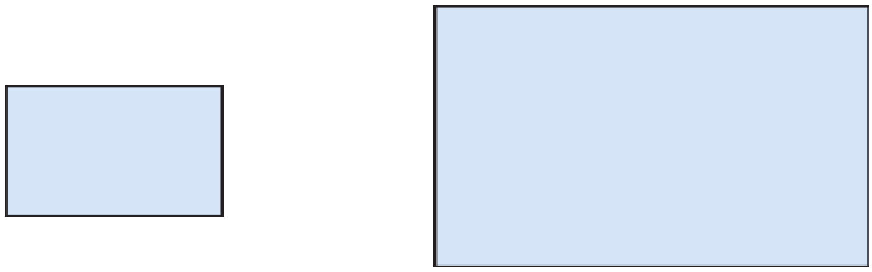
a) ¿Cuándo dos figuras son semejantes?¿Cuál es la razón entre las áreas de dos figuras semejantes?

b) Si las dos imágenes de los perros son semejantes, la altura del menor es 25 cm y la del mayor 45 cm.

b1) ¿Cuánto mide el rabo del mayor si en el menor mide 26 cm?

c) En una fotografía están Pablo y su padre. Se sabe que Pablo mide en la realidad 1,50 m. Las medidas en la fotografía son: Pablo, 6 cm, y su padre, 7,2 cm. ¿Cuánto mide su padre en la realidad?

Razona si son semejantes los dos rectángulos de la figura.



En caso afirmativo, averigua cuál es la razón de semejanza.

Ana ha dibujado dos cuadrados cuyos lados miden 1 y 3 cm, respectivamente. ¿Son semejantes? Calcula su razón de semejanza.

Dibuja dos figuras semejantes a una circunferencia de 1 cm de radio, con razones de semejanza 3 y $\frac{1}{2}$.